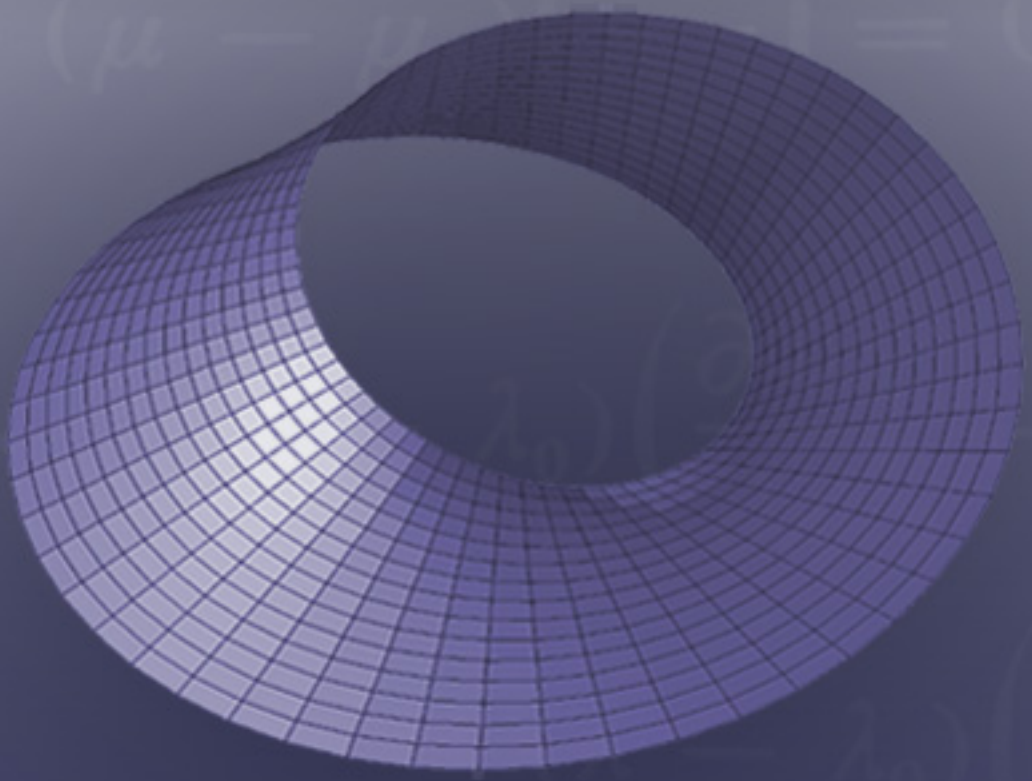
Boule minima contenant une partie bornée de l'espace



Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. IX - 1984 - nº 1 - p. 33-42

BOULE MINIMA CONTENANT UNE PARTIE BORNÉE DE L'ESPACE

[BOULE MIN.]

par M. Meimaris

De même qu'on calcule la médiane d'une distribution de points sur la droite, on souhaiterait en analyse des données multidimensionnelles, déterminer par un algorithme rapide, le centre et le rayon de la plus petite boule contenant un ensemble fini donné de points d'un espace euclidien. En l'état de nos connaissances, nous ne concevons pas d'algorithme, qui reste assez rapide quand s'élèvent le nombre des points et la dimension de l'espace ambiant : il nous faut en effet recourir itérativement à une procédure de projection d'un point sur un polyèdre convexe. Nous nous bornons donc à une étude géométrique (§1), sans écrire les détails d'un algorithme esquissé seulement (§ 2.5). Dans la mesure où les principes de démonstrations valent pour une partie bornée (non nécessairement finie) d'un espace normé, ou d'un espace métrique quelconque, nous nous plaçons d'abord (§ 1) dans un cadre général : si les notions générales sont notablement plus complexes que celles de la géométrie euclidienne de dimension finie, nous les renvoyons à un appendice (§ 1.5). Le § 2 qui se termine par un schéma d'algorithme concerne exclusivement une partie finie d'un espace euclidien usuel.

1 *Centres et rayons pour une partie d'un espace métrique*

1.1 *Notations générales* : Dans tout ce qui suit on se place dans un espace mégrique E ; on note d(m,n) la distance entre deux points m et n de E ; on considère une partie I de E ; les éléments (ou points) de I sont notés, comme d'usage par la lettre minuscule i, éventuellement affectée d'indices.

Soit c un point de l'espace E ; et R un nombre réel fini positif ou nul, par boule de centre c et de rayon R, nous entendons toujours la boule fermée, i.e. l'ensemble B(c;R) défini par :

$$B(c;R) = \{m \mid m \in E \ ; \ d(m,n) \leq R\}.$$

Une partie I de E est dite bornée si elle est incluse dans une boule ; il est clair que toute partie finie est bornée, car quel que soit c, I est incluse dans la boule de centre c ayant pour rayon le maximum de la distance d(c,i) pour $i \in I$. En général, si I est borné, I est incluse dans une boule de centre en un point m donné *a priori*, et de rayon convenable. En effet l'hypothèse I est bornée, équivaut à :

$$\exists\ c\ ,\ R : I \subset B(c;R)\ ;$$

mais alors on a, du fait de l'inégalité du triangle :

$$I \subset B(m\ ;\ R + d(m,c))\ .$$

Désormais on supposera I bornée.

(1) *Docteur 3° cycle en statistique. Banque agricole de Grèce.*

1.2 *Définition du rayon de I* : Notons C(I;R) l'ensemble des points c de E qui sont centre d'une boule de rayon R où I est incluse : on écrira :

$$C(I;R) = \{c|c \in E \ ; \ I \subset B(c;R)\} \ ;$$

il revient au même d'écrire que c appartient à C(I;R) si c est à une distance inférieure ou égale à R de tout point i de I :

$$C(I;R) = \{c|c \in E \ ; \ \forall \ i \in I : d(i,c) \leq R\}.$$

Sous cette forme, il est évident que C(I,R) est une partie fermée de E (i.e. que toute limite c' d'une suite cn de points de C(I;R) appartient à C(I;R) : car l'inégalité d'c',i) ≤ R résulte à la limite de d(cn,i) ≤R). De plus C(I;R) est borné, car il est inclus dans toute boule B(i;R) ayant pour centre un point i de I, et pour rayon R. Enfin si E est un espace vectoriel normé, C(I,R), est convexe.

La partie I étant supposée bornée, il est clair que pour une valeur suffisamment grande de R, C(I;R) est non-vide (i.e. : il existe une boule de rayon R contenant I) : on appellera "rayon de I", noté Rad(I) l'inf des valeurs de R pour lesquelles C(I;R) est non-vide :

$$Rad(I) = Inf\{R|R \geq 0 \ ; \ C(I;R) \neq \emptyset\} \ ; \text{ ou encore :}$$

$$Rad(I) = inf\{R|R \geq 0 \ ; \ \exists \ c : I \subset B(c;R)\}.$$

Il importe de noter que cette définition n'implique pas l'existence de boule de rayon Rad(I) où I est incluse : elle implique seulement que, quel que soit R' tel que $Rad(I) <_s R'$, (inégalité stricte), il existe une boule de rayon R' où I est incluse.

1.3 *Existence d'un centre de I* : Nous appelons, en bref, centre de I un point c tel que I soit incluse dans la boule B(c;Rad(i)) : formellement l'ensemble des centres de I n'est autre que :

$$Cent(I) = C(I;Rad(I))$$

mais la question posée à la fin du § 1.2 subsiste : CEnt(I) est-il vide ? Question qu'on prolongera en se demandant si Cent(I) est réduit à un point. En d'autres termes on étudiera l'existence et l'unicité d'un centre pour I.

Si dans l'espace E toute boule fermée est compacte (c'est le cas notamment si E est un espace euclidien de dimension finie) il est facile de montrer que Cent(I) est non-vide. En effet quand R tend vers Rad(I) en décroissant, la partie compacte C(I;R) décroît en restant non-vide ; elle a donc une limite non-vide qui n'est autre que Cent(I) : de façon précise est non-vide l'intersection :

$$\cap \{C(I;R) \ R >_s Rad(I)\}$$

et il est clair que cette intersection n'est autre que C(I;Rad(I)), car quel que soit c dans celle-ci, I est incluse dans B(c,R) pour tout $R >_s Rad(I)$ donc aussi dans B(c,Rad(I)). Une autre manière de présenter l'argument de compacité consiste à dire qu'à tout point m de E, il correspond un rayon minimum Rm(I;m), rayon de la plus petite sphère de centre m où I est incluse ; et que Rm(I;m) étant une fonction continue de m, celle-ci atteint son minimum, qui n'est autre que Rad(I) en un point qui sera donc un centre pour I.

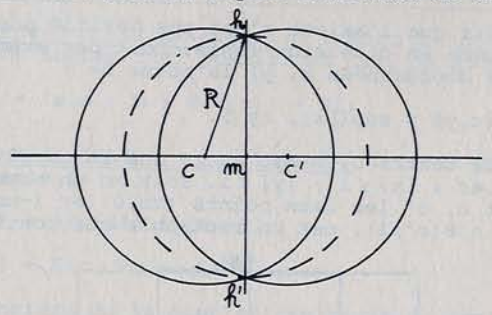
Cependant, une autre voie existe ; qui conduit à démontrer simultanément l'existence et l'unicité, sans recourir à la compacité ; mais seulement à la complétude ; par une démonstration qui vaut donc en dimension infinie pour l'espace de Hilbert ; (et pour un espace de Banach, moyennant une hypothèse restrictive).

1.4 *Unicité du centre de I* : Nous démontrerons d'abord l'unicité dans le cas d'un espace euclidien de dimension finie, en admettant la démonstration d'existence déjà donnée. Puis nous généraliserons la démonstration pour établir à la fois l'existence et l'unicité également en dimension infinie. La démonstration repose sur le lemme suivant :

lemme : Soit c, c' deux points de E ; ; d(c,c') = 2ε ; soit m le milieu du segment (c,c') ; et soit R un nombre réel supérieur ou égal à ε ; alors on a l'inclusion :

$$B(c;R) \cap B(c';R) \subset B(m;(R^2 - \varepsilon^2)^{1/2}) \ .$$

La démonstration se fait élémentairement, en considérant une section par un plan contenant les deux points c et c'. Le résultat vaut donc non seulement pour un espace euclidien de dimension finie



quelconque, mais aussi pour un espace de Hilbert de dimension infinie.

Du lemme, il résulte immédiatement que Cent(I) ne peut contenir deux points distincts c, c' : car si d(c,c') = 2ε ≠ 0, alors I est inclus dans une boule de rayon $R' = (Rad^2 - \varepsilon^2)^{1/2}$; et le rayon de I serait inférieur ou égal à R', donc inférieur strictement à Rad contrairement à l'hypothèse.

Plus généralement on déduit du lemme la proposition suivante, valant si E est un espace de Hilbert :

proposition : Soit c et c' deux points de C(I;R) : on a pour la distance d(c',c) la majoration :

$$d(c,c') \leq 2 \ (R^2 - (Rad(I))^2)^{1/2} \ ;$$

en particulier, C(I;R) est inclus dans toute boule dont le centre est l'un de ses points et le rayon $2(R^2 - Rad^2)^{1/2}$.

Il résulte de la proposition que les ensembles C(I;R) (pour $R >_s Rad(I)$) constituent une base de filtre de Cauchy qui converge donc vers un point unique : le centre de I. Le lecteur non familier avec ce langage pourra faire le raisonnement suivant : Soit Rn une suite décroissante tendant vers Rad(I) pour valeur supérieure ; en un point de C(I;Rn) ; alors la suite des cn converge car :

$$m \geq n \Rightarrow d(cn,cm) \leq 2 \ (Rn^2 - Rad^2)^{1/2}.$$

La limite c^∞ de cette suite est un point qui appartient à tout C(I,R) (comme limite de points lui appartenant), donc (cf. *supra*) à Cent(I) = C(I,Rad). De plus si

$$R < (Rad^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$$

C(I,R) est inclus dans la boule $B(c^\infty ; 2\varepsilon)$; donc C(I,R) tend vers c^∞ .

1.5 *Appendice : cas d'un espace normé quelconque* : La démonstration donnée de l'existence et de l'unicité du centre vaut encore si E est un espace normé complet satisfaisant à l'axiome suivant :

axiome : notons comme ci-dessus c, c' deux points de E, et m le milieu de (c,c') ; et désignons par R, ε, α des nombres astreints à être strictement positifs : alors l'axiome s'énonce :

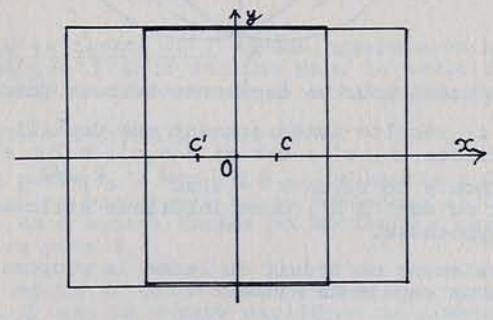
$$\forall\ R,\ \forall\ \varepsilon,\ \exists\ \alpha : d(c,c') > 2\varepsilon \Rightarrow (B(c;R) \cap B(c';R)) \subset B(m;R-\alpha).$$

En effet il résulte de l'axiome que pour tout ε on peut trouver un α tel que dans $C(I;Rad + \alpha)$ la distance de deux points c et c' soit majorée par 2ε : et donc les C(I,R) pour $R >_s Rad(I)$ forment une base de filtre de Cauchy.

Il est clair que l'axiome n'est pas vérifié pour un espace normé quelconque, même en dimension finie. Soit par exemple dans le plan (rapporté à deux coordonnées x, y) la norme L^∞ :

$$d(0;(x,y)) = \sup(|x|, |y|).$$

La boule unité de centre 0, n'est autre que le carré de centre 0 et côté 2 défini par : $|x| \le 1$; $|y| \le 1$. Soit xc un nombre réel positif $xc \le 1$; et soit c, c' les deux points (xc,0) et (-xc,0) : l'intersection $B(c;1) \cap B(c';1)$, est un rectangle qui contient les deux



points i = (0,1) et i' = (0,-1) ; et la plus petite boule de centre 0 (milieu de c,c') contenant I = {i,i'} est la boule unité de centre 0; corrélativement tout point du segment joignant (-1,0) et (1,0) est un centre pour I.

On a un résultat semblable pour la norme L1 : d1(0;(x,y)) = |x| + |y| ; (pour laquelle la boule unité est le carré |x| + |y| = 1); les notations sont seulement un peu moins simples, car il faut décaler le carré suivant une bissectrice...

En dimension finie, on peut toujours établir l'existence d'un centre par l'argument de compacité donné au § 1.3. Et il y a unicité si et seulement si la frontière de la boule unité ne comporte pas d'arête rectiligne (ou de facette non réduite à un point).

En dimension infinie nous ne connaissons même pas de démonstration d'existence pour un espace complet (e. de Banach) ne satisfaisant pas à l'axiome. Et l'on peut déroger à l'axiome même si la boule unité ne comporte pas de facette non réduite à un point : par exemple avec une infinité de coordonnées, l'une x , et les autres yn (n = 1,2,...), on peut définir la boule unité par l'équation :

$$\Sigma\{(yn(1 - x^n)^{-1/n})^2 | n = 1,\dots\infty\} \le 1$$

(les sections par x = cte < 1, sont des ellipsoïdes dont les axes an tendent vers 1 quand $n \to \infty$) : et alors si c et c' sont deux points de l'axe des x d'abscisses opposées inférieures strictement à 1 en module, l'intersection $B(c;1) \cap B(c';1)$ n'est contenue dans aucune boule B(0;R) si $R <_s 1$; cette intersection a pour rayon 1 et admet pour centre tout point du segment (c,c').

2 *Recherche du centre d'une partie finie d'un espace euclidien*

Désormais, l'espace ambiant E est un espace euclidien de dimension finie, et I est un ensemble fini de points de E .

2.1 *Notations complémentaires et rappels de géométrie euclidienne*

2.1.1 *Sphère de centre c et de rayon R* : Soit c un point quelconque de E , et R un nombre réel positif ou nul. On note :

$$S(c;R) = \{m | m \in E ; d(m;c) = R\}.$$

2.1.2 *Sphère minima de centre c contenant I* : c'est un point quelconque de E ; on note :

$$Rm(c;I) = \sup\{d(c,i) | i \in I\} ;$$

$$Sm(c;I) = S(c ; Rm(c ; I)) \quad ;$$

Sm(c;I est la frontière de la plus petite boule de centre c où I est incluse ; on dira que Sm(c,I) est la plus petite sphère de centre c renfermant I. On note :

$$Im(c;I) = \{i | i \in I ; d(c,i) = Rm(c;I)\}$$

$$= I \cap Sm(c ; I) ;$$

Im(;I) est l'ensemble de contact de I avec la plus petite sphère de centre c renfermant I.

2.1.3 *Centre d'une partie finie de E* : puisqu'il y a un centre unique de I, ce centre pourra être noté comme une fonction de I :

$$Cent(I) = \{cent(I)\}$$

(l'ensemble Cent est réduit à un point unique cent ; cf. § 1.3)

2.1.4 *Enveloppe convexe d'une partie finie de E* : On notera :

Conv(I)=le polyèdre enveloppe convexe de I ;

ce polyèdre n'est autre que l'ensemble des points de E qu'on peut obtenir comme barycentre des points de I, munis de masses positives ou nulles convenables. Soit a un point de E, on notera :

proj(a ; conv(I)) = la projection de a sur le convexe Conv(I);

proj est le point unique réalisant le minimum de la distance entre a et un point du convexe Conv(I). Si $a \in$ Conv(I) est sa propre projection.

Notons en général :

$$Fpr(a;Conv(I)) = \{m \mid m \in Conv(I) \ ; \ \langle a-p, m-p \rangle = 0\} \ ;$$

où on a écrit p pour proj(a;Conv(I)) ; et ou <,> est le produit scalaire euclidien usuel. Dans le cas où $a \in$ Conv(I), Fpr est le convexe Conv(I) tout entier ; sinon c'est l'intersection de Conv(I) avec l'hyperplan perpendiculaire à (a,p) passant par p. L'ensemble Fpr est une facette de Conv(I) enveloppe convexe de son intersection avec I. On notera :

$$Ipr(a;Conv(I)) = I \cap Fpr(a;Conv(I)) \ ,$$

l'ensemble des sommets de cette facette Fpr perpendiculairement à laquelle a se projette sur Conv(I).

2.1.5 Inversion : Soit s un point quelconque de E ; l'inversion de centre s (et de puissance 1) est une transformation involutive biunivoque de E-{s}. On note, quel que soit $m \in E - s$:

$$Inv(s;m) = \text{inverse de } m \text{ par rapport à } s.$$

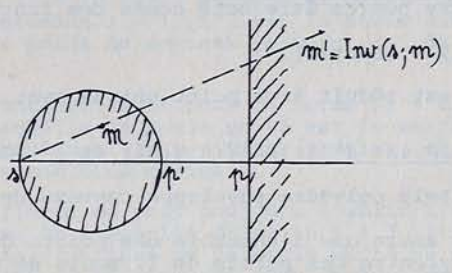
Inv(s;m) est l'unique point m' de la droite sm tel que $\langle m-s, m'-s \rangle = 1$ (ou encore l'unique point m' de la demi-droite issue de s passant par m tel que $d(s,m) \times d(s,m') = 1$). On a l'involutivité :

$$\forall\, m \in E - s : Inv((s;Inv(s;m)) = m.$$

Si A est une partie E - s on note :

$$Inv(s;A) = \{m' \mid \exists\, m \in A : m' = Inv(s;m)\}$$

En vue de la construction du § 2.4, nous rappellerons que l'inversion de centre s met en correspondance biunivoque les sphères (hypersphères) passant par s et les plans (hyperplans) ne passant pas par s. De façon précise, soit H un hyperplan ne passant pas par s ; notons p la projection orthogonale de s sur H ; et p' = Inv(s,p) : alors Inv(s,H) est la sphère de diamètre (s,p') (plus exactement cette sphère privée du point s) ; et l'inversion met en correspondance biunivoque l'intérieur de cette sphère avec le demi-espace de frontière H situé au-delà de H relativement à s. La sphère est d'autant plus petite que le point p est plus éloigné de s.



2.2 Centre d'un ensemble fini inclus dans une sphère :

Théorème 1 . Soit I un ensemble fini inclus dans la sphère de centre c et de rayon R :

$$I \subset S(c;R) \ ; \text{ i.e. } \forall\, i \in I : d(c,i) = R \ ;$$

alors le centre de I est la projection de c sur l'enveloppe convexe de I :

$$cent(I) = proj(c;Conv(I)) \ .$$

La preuve du théorème sera décomposée en celle de deux propositions.

proposition 1 Soit $I \subset S(c;R)$; si $c \in$ Conv(I) alors c = cent(I).
preuve : il faut montrer que :

$$m \neq c \Rightarrow Rm(m;I) >_s Rm(c;I) = R.$$

L'hypothèse c Conv(I) équivaut à affirmer qu'il existe une fonction k(i) définie sur I et telle que c soit barycentre de I muni des masses k(i), i.e. :

$$\forall\, i \in I : k(i) \geq 0 \ ; \ \Sigma\{k(i) \mid i \in I\} = 1 \ ;$$

$$0 = \Sigma\{k(i)\ (i - c) \mid i \in I\}.$$

On a donc un produit scalaire nul de cette dernière somme avec (m-c):

$$0 = \Sigma\{k(i) \langle i - c , m - c \rangle \mid i \in I\}$$

les termes de cette somme de produits scalaires ne peuvent être tous strictement positifs :

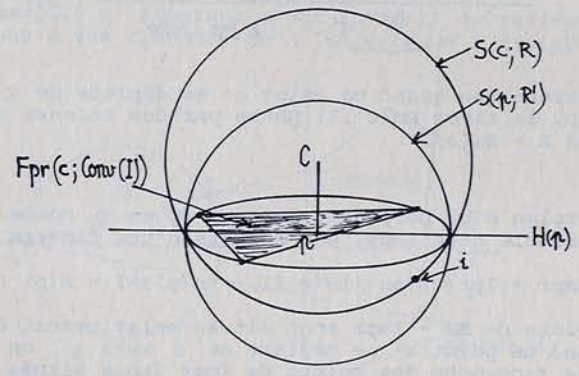
$$\exists\, i \in I : \langle i - c , m - c \rangle \leq 0 \ ; \text{ d'où :}$$

$$\|m - i\|^2 = \|m-c\|^2 - 2 \langle m - c , i - c \rangle + \|i - c\|^2 >_s R^2$$

ceci suffit à établir que Rm(m;I) est supérieur strictement à R^2 ; d'où résulte la proposition 1.

proposition 2 : Soit $I \subset S((c;R)$; $c \notin$ Conv(I) : alors le centre de I n'est autre que la projection p de c sur Conv(I).

preuve : Reprenons les notations du § 2.1.4. On a p = proj(c;Conv(I)) ; l'hyperplan H(p) perpendiculaire à cp en p coupe Conv(I) suivant une facette Fpr(c;I) = H(p) ∩ Conv(I), qui n'est autre que l'enveloppe convexe de H(p) ∩ I = Ipr(c;I) ; on a : $p \in$ Fpr(c;I). L'ensemble Ipr(c;I) est inclus dans la sphère de centre p et de rayon $R' = (R^2 - d(c,p)^2)^{1/2}$.



Il résulte de la proposition 1 que p est le centre de Ipr(c;I). De plus on voit sur la figure (qui est une section par le plan c p i) que tout point $i \in I - Ipr(c;I)$ est inclus dans la boule B(p;R'). Donc p est le centre de I et I a pour rayon R' ; car en bref aucun autre point c' ne ut être centre de I , puisque pour la partie I' = Ipr(c;I) de I (et *a fortiori* pour I) on a $Rm(c';I') >_s R'$.

2.3 *Centre de l'ensemble I et centre d'un ensemble de contact Im(c;I)*

Théorème 2 : Le point c est centre de I si et seulement si il est le centre de l'ensemble de contact avec I de la sphère minima de centre c : ce qu'on écrira

$$c = \text{cent}(I) \Leftrightarrow c = \text{cent}(\text{Im}(c;I)) .$$

Comme antérieurement on prouvera le théorème en deux propositions.

proposition 3 : $c = \text{cent}(\text{Im}(c;I)) \Rightarrow c = \text{cent}(I)$.

La preuve reprend un raisonnement défait à propos de la prop. 2.

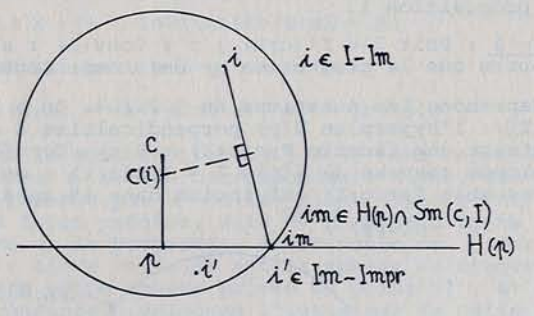
Soit $c' \neq c$: on montre que $\text{Rm}(c';I) >_s \text{Rm}(c;I)$, d'où il résulte que c' ne peut être centre de I. En effet puisque c est centre de Im(c;I) on a, de par l'unicité du centre (cf. § 1.4) :

$$\text{Rm}(c';\text{Im}(;I)) >_s \text{Rm}(c;\text{Im}(c;I)) = R ;$$

Im(c;I) étant inclus dans I on a *a fortiori* $\text{Rm}(c';I) >_s R$.

proposition 4 : $c = \text{cent}(I) \Rightarrow c = \text{cent}(\text{Im}(c;I))$.

Nous procéderons par l'absurde, en démontrant que $c \neq \text{cent}(\text{Im}(c;I))$ implique $c \neq \text{cent}(I)$. Supposons donc $c \neq \text{cent}(\text{Im}(c;I))$: il résulte de la proposition 2 que cent(Im(c;I)) est le point p = proj(c;Conv(Im)) (où on a noté simplement Im pour Im(c;I)) ; et que $p \neq c$. Reprenons la figure de la prop. 2.



On montrera que quand un point c' se déplace de c vers p sur le segment cp, le rayon Rm(c';I) passe par des valeurs strictement inférieures à R = Rm(c;I).

L'hyperplan H(p) perpendiculaire à cp en p coupe l'ensemble I suivant l'ensemble noté Impr, des sommets d'une facette Conv(Im) :

$$\text{Impr} = \text{Ipr}(c;\text{Conv}(\text{Im}(c;I))) = H(p) \cap I = H(p) \cap \text{Im}.$$

Les points de Im - Impr sont situés relativement à c au-delà de H(p). Quand un point c' se déplace de c vers p, on a vu au § 2.2, qu'il se rapproche des points de Impr (tous situés à égale distance de c') et que les points de Im - Impr sont toujours plus proches de c' que ne le sont ceux de Im. Restent les points $i \in I - \text{Im}$.

Il suffit de considérer un point i situé du même côté de H(p) que c. Sur la figure qui est une section par le plan cpi, on a marqué un point $\text{im} \in H(p) \cap \delta m(c;I)$. La médiatrice de (i,m) coupe (c,p) en un point c(i) : si c' est un point du segment (c,c(i)), la distance d(c',i) est inférieure ou égale à d(c',im) = Rm(c',Im). En prenant pour point c' celui des points c(i) qui est le plus proche de c, on aura $\text{Rm}(c',I) = \text{Rm}(c',\text{Im}) <_s \text{Rm}(c,I)$. Ce qui prouve que c n'est pas le centre de I et achève la démonstration par l'absurde de la prop. 4.

Remarque : la contruction ci-dessus permet partant d'un point c qui n'est pas le centre de I, de construire un point c' tel que $\text{Rm}(c';I) <_s \text{Rm}(c;I)$. Il est possible d'itérer cette construction : mais nous ne savons pas démontrer qu'il y ait convergence vers cent(I) en un nombre fini de pas. C'est pourquoi l'algorithme du § 2.5 repose sur un autre principe. Cependant, il faut noter que, en général Card Im sera inférieur ou égal à 1 + dimension de E : ce qui laisse espérer des calculs simples pour passer de c à c' ; tandis qu'au § 2.5 on a recours à la projection d'un point sur l'enveloppe de I, dont le nombre de sommets peut être élevé.

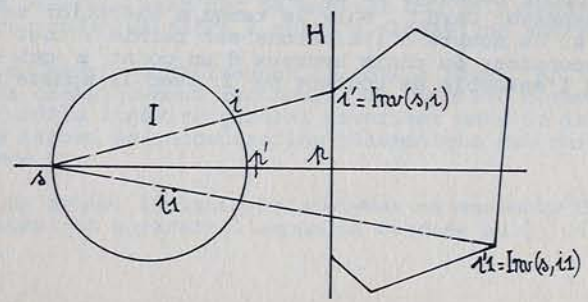
2.4 *Construction de la plus petite sphère passant par un point s donné et contenant I*

: On ne peut faire passer par tout point s une sphère enfermant I. La construction qui suit montrera d'abord à quelle condition une telle sphère existe ; et cette condition étant supposée satisfaite, elle fournira la sphère minima. Pour fixer les notations on supposera ici $s \notin I$: il est clair que le cas $s \in I$ ne change rien car une sphère passant par s et renfermant I - s renfermera aussi s.

Faisons une inversion de centre s : comme on l'a rappelé au § 2.1.5, une sphère S passant par s et renfermant I se transforme en un hyperplan H séparant s de Inv(s;I). Un tel hyperplan H existe seulement si $s \notin \text{Conv}(\text{Inv}(s;I))$. A la sphère la plus petite possible correspond l'hyperplan H séparant s de Inv(s;I) et aussi éloigné de s que possible. Cet hyperplan se construit en projetant s sur l'enveloppe convexe de Inv(s;I) : soit :

$$p = \text{proj}(s;\text{Conv}(\text{Inv}(s;I))) ;$$

H n'est autre que l'hyperplan perpendiculaire à sp en p. (En effet tout autre hyperplan H' séparant s de Inv(s;I) devra séparer s de p ; et sera donc à une distance de s inférieure à d(s,p)).



2.5 *Schéma d'un algorithme de recherche du centre* : L'algorithme utilise essentiellement la projection d'un point s sur l'enveloppe convexe d'un ensemble fini I . Des procédures à cet effet existent : nous ne tenterons pas de les rappeler, nous bornant à utiliser les notations posées au § 2.1. On notera qu'une telle procédure permet en particulier de reconnaître si $s \in \mathrm{Conv}(I)$, car s coïncide alors avec sa projection.

Nous donnons ci-dessous l'algorithme avec des commentaires qui rappellent les propriétés géométriques énoncées précédemment, et sur lesquelles il se fonde.

DEB
s:= $\tau\{\mathrm{Im}(\mathrm{cdg}(I);I)\}$

commentaire : on utilise la fonction $\tau\{I\}$ pour désigner un élément de I choisi arbitrairement ; cdg(I) est le centre de gravité de I : notre but est simplement de choisir un point s de I par lequel passe certainement une sphère renfermant I (ici la sphère $\delta m(\mathrm{cdg}(I);I)$; et qui de plus ait *a priori* les meilleures chances d'être un point de Im(cent(I);I) ; i.e. un point de contact de I avec la sphère minima le renfermant. En effet, comme on le verra si $s \in \mathrm{Im}(\mathrm{cent}(I);I)$, l'algorithme aboutit au premier passage, sans retour itératif.

IR:=Inv(s;I-s);
p:=proj(s;Conv(IR));
c:=(s+Inv(s;p))/2
R:=d(c,s);

commentaire : conformément au § 2.4, la sphère S(c;R) est la plus petite sphère passant par s et renfermant I.

si $c \in \mathrm{Conv}(I \cap S(c;R))$ aller à FIN;

commentaire conformément aux Th. 1 et 2, c'est le centre I si et seulement si il est le centre de l'ensemble de contact de S(c;R) avec I , ou encore s'il appartient à l'enveloppe convexe de cet ensemble de contact.

I:=I-s ; aller à DEB

commentaire, : si la sphère minima passant par s et renfermant I n'est pas la sphère minima renfermant I , celle-ci peut être déterminée comme étant la sphère minima renfermant I-s : en effet elle est selon le Th.2 la sphère minima renfermant son ensemble de contact avec I ; lequel ensemble n'inclut pas s . Il est clair que l'algorithme proposé converge en un temps fini, le nombre des itérations ne pouvant dépasser Card I . Mais le temps d'exécution ne sera satisfaisant que si le nombre d'itérations est faible : tout dépend, comme nous l'annoncions du choix heureux d'un point s qui se trouve appartenir à l'ensemble de contact de I avec la sphère minima cherchée.